Université Hassan II – Aïn Chock
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales
Casablanca

Filière : S. E. G
Algèbre mathématique I
Série 2

Année universitaire 2019/20
Semestre : S2

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-2 & 5\\5 & 0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\-1 & -4 & 0\\0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les produits matriciels possibles ?
2. Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques ?

Exercice 2

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$
2. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\-1 & -2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$
3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\\0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit a et b des réels non nuls, et $A=\begin{pmatrix}a & b\\0 & a\end{pmatrix}$.

Trouver toutes les matrices $B\in M_2(R)$ qui commutent avec A.

Exercice 4

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\3 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

1. Calculer AB, AC. Que constate-t-on ?
2. La matrice A peut-elle être inversible ?
3. Trouver toutes les matrices $F\in M_3(R)$ telles que AF = 0 (ou 0 désigne la matrice nulle)

Exercice 5

Donner le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\2 & 3 & 4 & 2\\3 & 4 & 5 & 2\end{pmatrix}\ \text{et}\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\-2 & -3 & 0 & -5\\4 & 9 & 6 & 7\\1 & 1 & -5 & 5\end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1- Montrer que $A^2 = 2I - A$.
2- En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7

Déterminer la valeur de α pour laquelle $\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ est nul.

Exercice 8

Montrer que $A = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Exercice 9

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 10

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les polynômes caractéristiques de la matrice A.
2- Déduire les valeurs et vecteurs propres de A.
3- Reprendre les mêmes questions pour les matrices B et C.

Exercice 11

Résoudre le système d'équations suivantes en utilisant la notion des matrices :

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 5 \\ \quad 2y - z = 3 \\ 2x - 4y + z = 1 \end{cases}$$